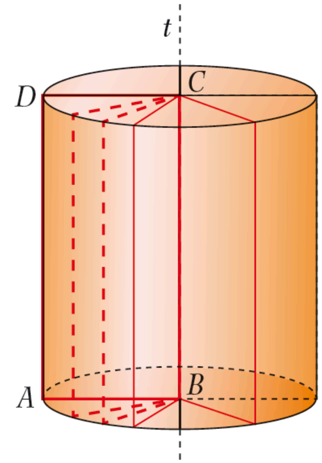
Solidi di rotazione

Cilindro

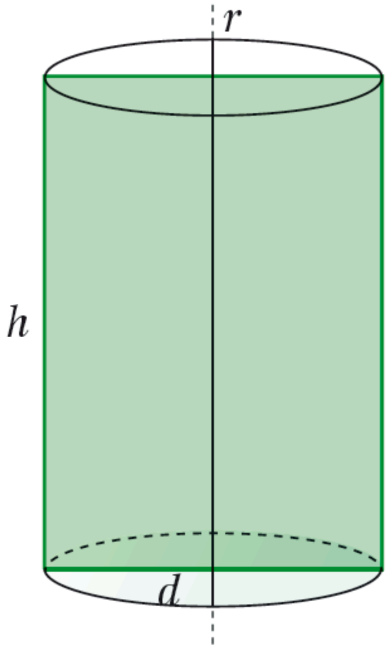
Il **cilindro** è il solido ottenuto dalla rotazione completa di un rettangolo attorno a uno dei suoi lati.



- La retta *t* è l'**asse** del cilindro.
- *DA* rappresenta la distanza fra i piani contenenti le basi del cilindro, ed è la sua **altezza**.
- I due cerchi congruenti descritti dalla rotazione dei lati *AB* e *CD* sono le **basi** del cilindro.
- La superficie curva generata dalla rotazione del lato *AD* è la **superficie laterale**.
- La superficie laterale e le superfici delle due basi insieme costituiscono la **superficie totale** del cilindro.

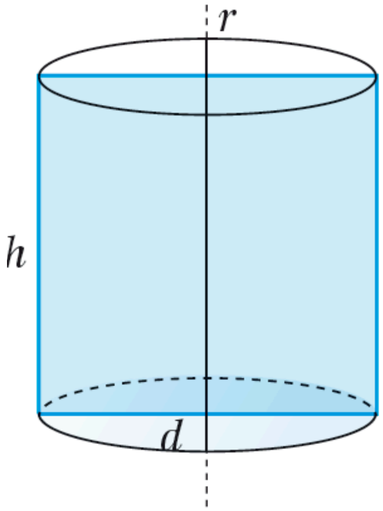
Cilindro

Se tagliamo un cilindro con un piano passante per l'asse otteniamo una sua **sezione**: un **rettangolo** che ha per base il diametro della base e per altezza l'altezza del cilindro.



Se il diametro di base (*d*) è uguale all'altezza (*h*), cioè **se la sezione è un quadrato**, allora il cilindro è detto **equilatero**.

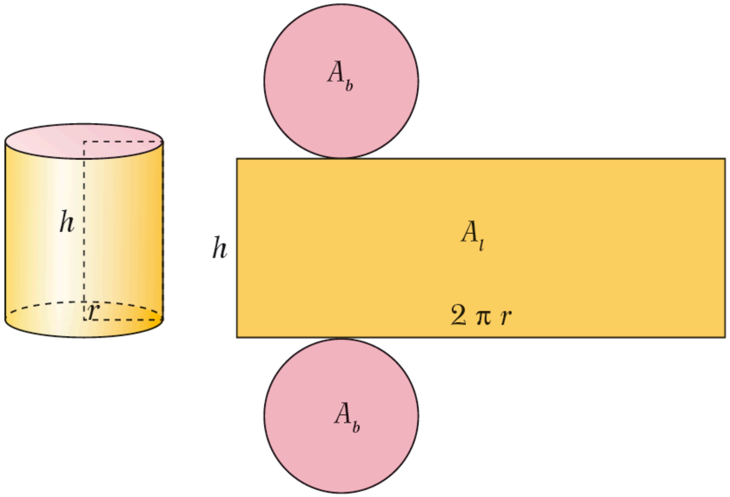
cilindro equilatero
$d = h$



Cilindro

Lo **sviluppo piano** di un cilindro è formato da un rettangolo, che costituisce la superficie laterale, e due cerchi congruenti che sono le basi del cilindro.

Il rettangolo che costituisce la superficie laterale ha per base un segmento congruente alla circonferenza di base del cilindro e per altezza l'altezza del cilindro.



- L'**area della superficie laterale di un cilindro** si ottiene moltiplicando la misura della lunghezza della circonferenza di base per la misura dell'altezza del cilindro:

  $$A_l = 2\pi r \cdot h$$

- L'**area della superficie totale di un cilindro** si ottiene aggiungendo all'area della superficie laterale l'area delle due basi:

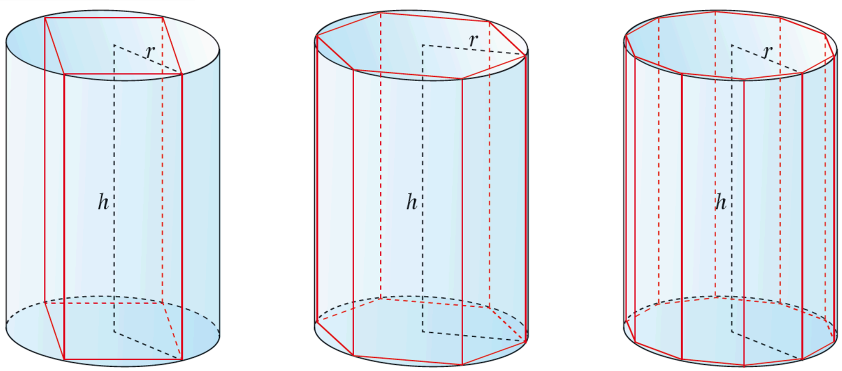
  $$A_t = 2\pi r \cdot (h + r)$$

Cilindro

VOLUME DI UN CILINDRO

Consideriamo un cilindro retto e un prisma aventi la stessa altezza e tali che il poligono regolare di base del prisma sia inscritto nel cerchio di base del cilindro.

Aumentando il numero di lati del poligono di base del prisma la sua area si avvicinerà sempre di più all'area del cerchio di base del cilindro e quindi il volume del prisma si avvicinerà sempre di più a quello del cilindro.



Per un numero infinitamente grande di lati si può considerare il volume del prisma uguale a quello del cilindro.
Per calcolare il volume del cilindro possiamo usare le regole utilizzate per il prisma.

Il **volume di un cilindro** si ottiene moltiplicando l'area del cerchio di base per la misura dell'altezza:

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

Cilindro

SUPERFICIE DI UN CILINDRO EQUILATERO

Nel **cilindro equilatero h = 2r** per cui:

- l'**area della superficie laterale** sarà:

  $A_l = 4\pi r^2$

- l'**area della superficie totale** sarà:

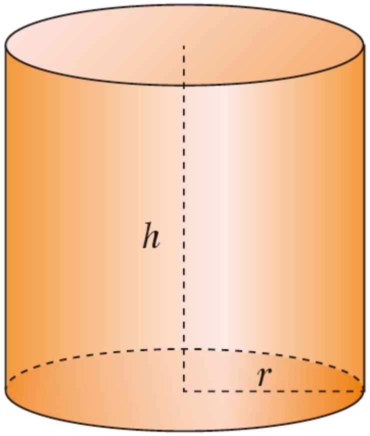
  $A_t = 6\pi r^2$

VOLUME DI UN CILINDRO EQUILATERO

Nel **cilindro equilatero h = 2r**

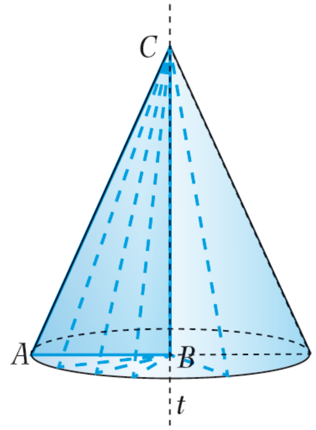
per cui il **volume** sarà:

$V = 2\pi r^3$



Cono

Il **cono** è il solido ottenuto dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno a uno dei suoi cateti.

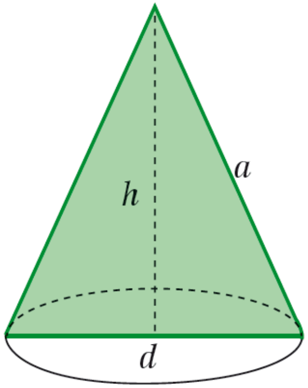


- La retta t è l'**asse** del cono;
- il punto C è il **vertice**;
- CB è la distanza di C dal piano che contiene la base, quindi è l'**altezza**;
- il cerchio descritto dalla rotazione del cateto AB è la **base** del cono;
- l'ipotenusa CA, detta **apotema** del cono, genera, durante la rotazione, una superficie curva che costituisce la **superficie laterale** del cono;
- la superficie laterale e la superficie della base insieme formano la **superficie totale**.

Cono

Se tagliamo un cono con un piano passante per l'asse otteniamo una sua **sezione**, un **triangolo isoscele** che ha:

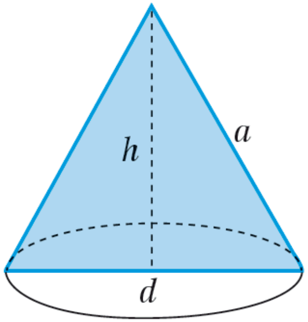
- per base il diametro *d* della base del cono;
- per altezza la sua altezza *h;*
- per lato obliquo l'apotema del cono *a*.



In ogni cono l'altezza *h* e il raggio di base *r* sono i cateti del triangolo rettangolo che ha per ipotenusa l'apotema *a*.

Possiamo così applicare il teorema di Pitagora per calcolare l'**apotema**:

$$\boldsymbol{a = \sqrt{h^2 + r^2}}$$



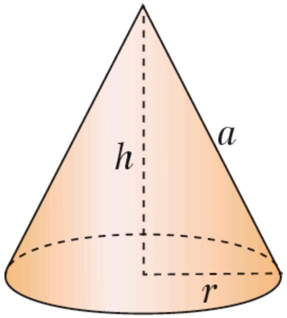
Se la sezione risulta essere un triangolo equilatero, allora l'apotema è congruente al diametro di base e il cono è detto **equilatero**.

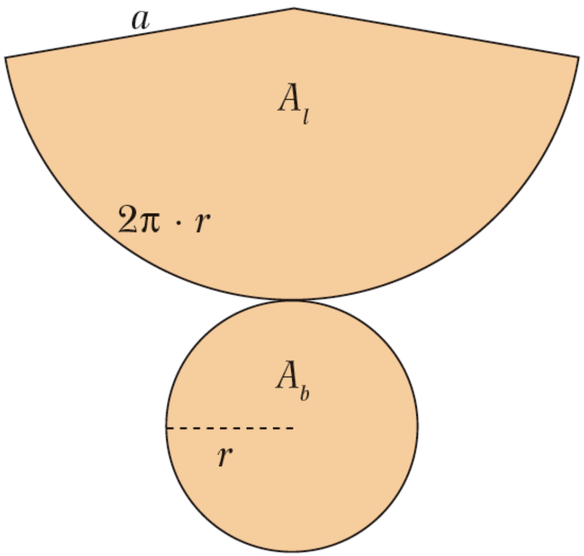
Cono

SUPERFICIE LATERALE E TOTALE DI UN CONO

Lo **sviluppo piano** di un cono è rappresentato da un settore circolare, che costituisce la superficie laterale del cono, e da un cerchio.

L'area della superficie laterale di un cono è quindi equivalente a quella di un settore circolare avente il raggio uguale all'apotema *a* del cono e l'arco congruente alla lunghezza $2\pi r$ della circonferenza di base del cono.





- L'**area della superficie laterale di un cono** si ottiene moltiplicando la misura della circonferenza di base per la misura dell'apotema e dividendo il prodotto per due:
  $$A_l = \pi r \cdot a$$
- L'**area della superficie totale di un cono** si ottiene aggiungendo all'area della superficie laterale l'area di base:
  $$A_t = \pi r \cdot (a + r)$$

Cono

CONO EQUILATERO

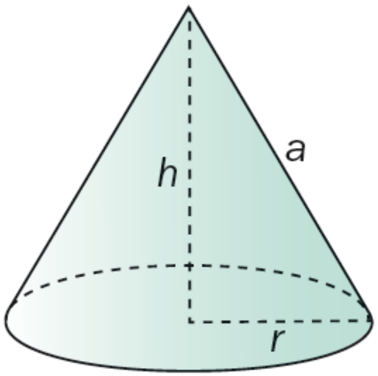
Nel cono equilatero $\boldsymbol{a = 2r}$, per cui:

- l'**area della superficie laterale** sarà:

  $\boldsymbol{A_l = 2\pi r^2}$

- l'**area della superficie totale** sarà:

  $\boldsymbol{A_t = 3\pi r^2}$



Cono

VOLUME DI UN CONO

Un cono è equivalente alla terza parte di un cilindro avente la base e l'altezza congruenti a quelle del cono.

Il **volume di un cono** si ottiene moltiplicando l'area della sua base per la misura dell'altezza e dividendo il prodotto per 3:

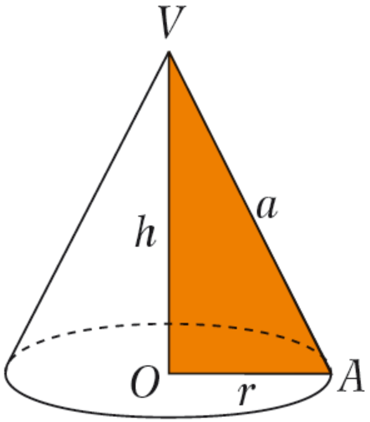
$$V_{\text{cono}} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

VOLUME DI UN CONO EQUILATERO

Nel **cono equilatero *a* = 2*r***

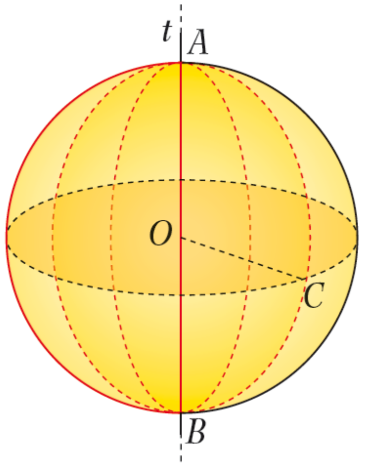
per cui il **volume** sarà:

$$V_{\text{cono equilatero}} = \frac{\pi r^3 \cdot \sqrt{3}}{3}$$



Sfera e superficie sferica

La **sfera** è il solido generato dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al proprio diametro.



La **superficie sferica** è l'insieme dei punti dello spazio equidistanti da un punto detto centro.

La distanza di un punto qualsiasi della superficie sferica dal centro coincide con il **raggio** della sfera.

Gli altri punti dello spazio possono avere dal centro della sfera:

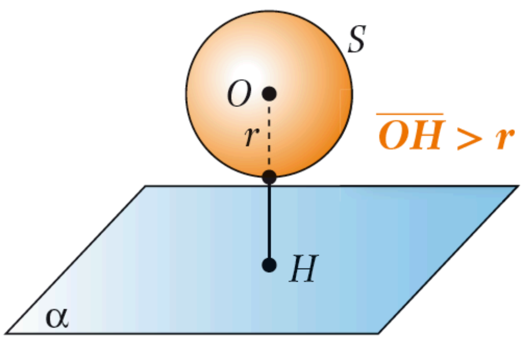
- una **distanza maggiore del raggio** (**punti esterni** alla sfera);
- una **distanza minore del raggio** (**punti interni** alla sfera).

Sfera e superficie sferica

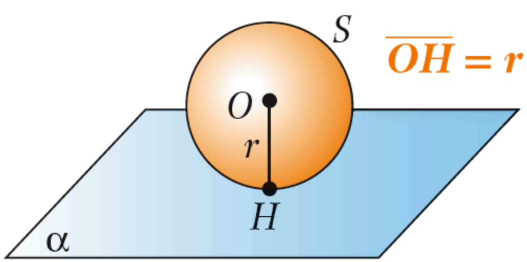
POSIZIONI DI UN PIANO RISPETTO A UNA SFERA

Un piano α e una sfera *S* di centro *O* possono avere o non avere punti in comune.

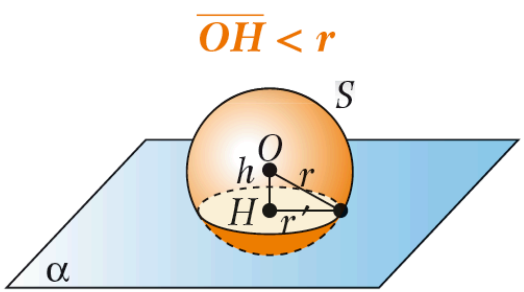
α è **esterno** alla sfera

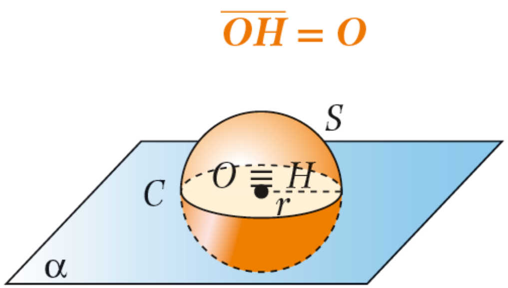


α è **tangente** alla sfera



α è **secante** la sfera





Il piano α e la sfera hanno in comune un cerchio *C* di raggio $r = r'$ detto **cerchio massimo**.
Il piano α divide la sfera in due parti congruenti dette **semisfere**:

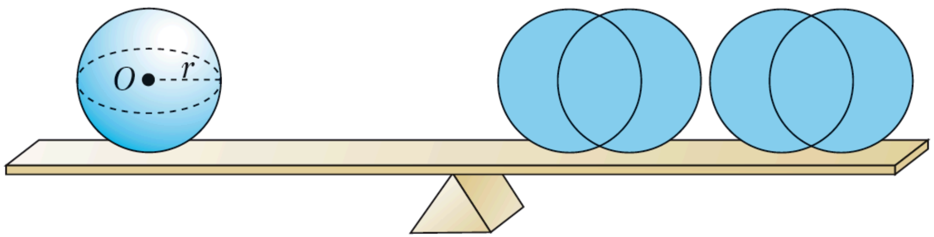
$\boldsymbol{O \equiv H}$ **e** $\boldsymbol{r = r'}$

Sfera e superficie sferica

SUPERFICIE SFERICA

L'**area della superficie di una sfera** equivale a quattro volte l'area della superficie di un suo cerchio massimo:

$$S = 4\pi r^2$$

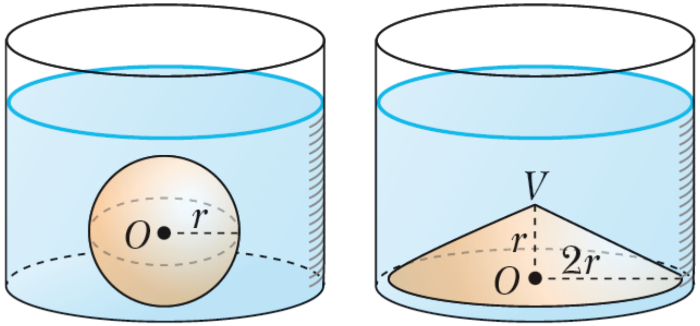


VOLUME DI UNA SFERA

Una **sfera** è **equivalente a un cono** avente per altezza il raggio *r* della sfera e per raggio di base il diametro della sfera (2*r*).

Il **volume della sfera** si ottiene moltiplicando il cubo della misura del suo raggio per $\frac{4}{3}\pi$:

$$V_{sfera} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$$



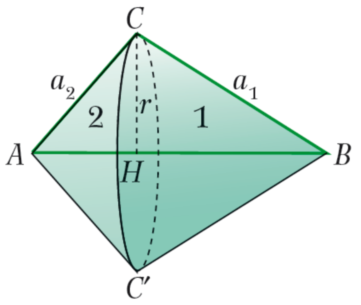
Lattes

Altri solidi di rotazione

- **Rotazione di 360° di un triangolo rettangolo attorno all'ipotenusa**

  $A_{solido} = A_{l\ cono\ 1} + A_{l\ cono2}$

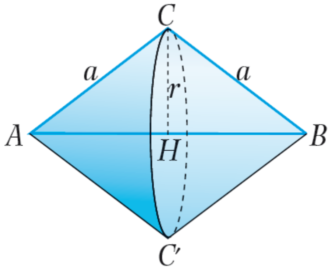
  $V_{solido} = V_{cono1} + V_{cono2}$



- **Rotazione di 360° di un triangolo isoscele attorno alla base**

  $A_{solido} = 2 \cdot A_{l\ cono}$

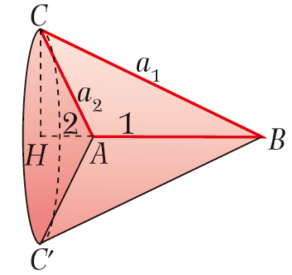
  $V_{solido} = 2 \cdot V_{cono}$



- **Rotazione di 360° di un triangolo ottusangolo attorno al prolungamento di un lato che forma l'angolo ottuso**

  $A_{solido} = A_{l\ cono\ 1} + A_{l\ cono2}$

  $V_{solido} = V_{cono1} - V_{cono2}$

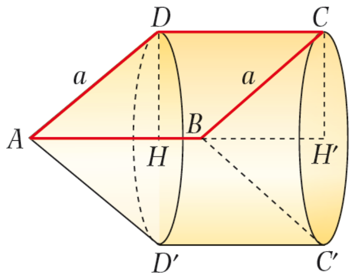


Altri solidi di rotazione

- **Rotazione di 360° di un parallelogramma attorno a un lato**

  $A_{solido} = 2 \cdot A_{l\ cono} + A_{l\ cilindro}$

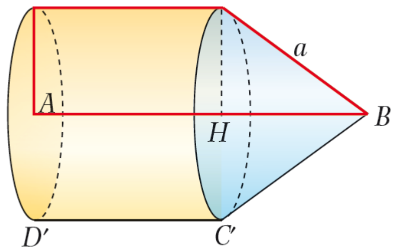
  $V_{solido} = V_{cono} + V_{cilindro} - V_{cono} = V_{cilindro}$



- **Rotazione di 360° di un trapezio rettangolo attorno alla base maggiore**

  $A_{solido} = A_{b\ cilindro} + A_{l\ cilindro} + A_{l\ cono}$

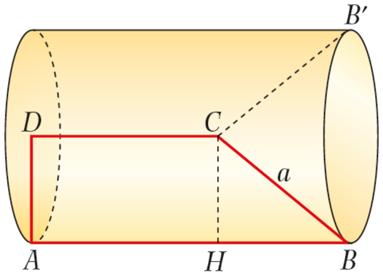
  $V_{solido} = V_{cilindro} + V_{cono}$



- **Rotazione di 360° di un trapezio rettangolo attorno alla base minore**

  $A_{solido} = A_{b\ cilindro} + A_{l\ cilindro} + A_{l\ cono}$

  $V_{solido} = V_{cilindro} - V_{cono}$

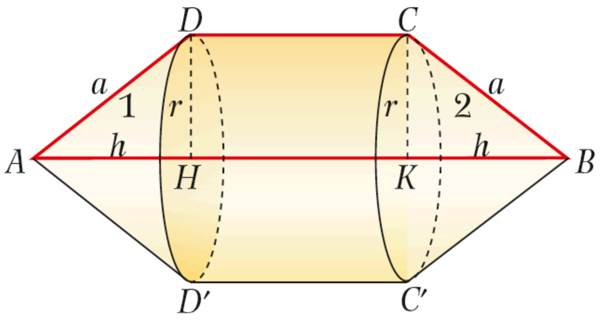


Altri solidi di rotazione

- **Rotazione di 360° di un trapezio isoscele attorno alla base maggiore**

$$A_{solido} = A_{l\ cilindro} + 2 \cdot A_{l\ cono}$$

$$V_{solido} = V_{cilindro} + 2 \cdot V_{cono}$$



- **Rotazione di 360° di un trapezio isoscele attorno alla base minore**

$$A_{solido} = A_{l\ cilindro} + 2 \cdot A_{l\ cono}$$

$$V_{solido} = V_{cilindro} - 2 \cdot V_{cono}$$